

А.С. Калитвин

ЛЕКЦИИ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ  
АНАЛИЗУ

Часть V  
Ряды

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Липецк — 2018



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Липецкий государственный педагогический университет  
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского"

А.С. Калитвин

**ЛЕКЦИИ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ  
АНАЛИЗУ**

**Часть V  
Ряды**

Учебное пособие  
для студентов педагогических вузов

Липецк — 2018



УДК 517  
ББК 22.1  
К 172

Рекомендовано к печати  
кафедрой математики и физики  
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского.  
Протокол № 1 от 31.08.2018 г.

Калитвин, А.С. Лекции по математическому анализу. Часть V. Ряды: Учебное пособие для студентов педагогических вузов / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2018. – 79 с.

ISBN 978-5-88526-987-2 (Ч. 5)  
978-5-88526-846-2

Пособие является пятой частью курса лекций по математическому анализу для студентов математических профилей подготовки педагогических вузов. В его основу положены лекции, читавшиеся автором в Липецком государственном педагогическом университете.

В пособии излагаются основы теории числовых рядов с действительными и комплексными членами, изучаются функциональные последовательности и ряды, степенные ряды в действительной и комплексной областях, ряды Фурье. Пособие содержит примерные вопросы и задачи к экзамену или зачету. Предназначено для студентов педагогических вузов по профилям подготовки: "Математика и информатика", "Математика и физика", "Информатика и математика", "Физика и математика".

Рецензенты: И.В. Барышева, канд. ф.-м. наук,  
ФГБОУ ВО „Финансовый университет  
при правительстве РФ“ (Липецкий филиал),  
В.А. Калитвин, канд. ф.-м. наук, доцент  
ФГБОУ ВО „Липецкий государственный  
педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского“

УДК 517  
ББК 22.1  
К 172

ISBN 978-5-88526-987-2 (Ч. 5)  
ISBN 978-5-88526-846-2

© А.С. Калитвин, 2018  
© ФГБОУ ВО „Липецкий государственный  
педагогический университет имени  
П.П. Семенова-Тян-Шанского“, 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
<b>ГЛАВА I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ</b>	<b>7</b>
§1. Числовой ряд и его сходимость	7
§2. Действия над рядами	8
§3. Остаток ряда	9
§4. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд	10
§5. Критерий Коши сходимости числовой последовательности и числового ряда	11
§6. Сходимость положительных рядов. Признаки сравнения	12
§7. Признак Даламбера	14
§8. Признак Коши	16
§9. Интегральный признак сходимости рядов	17
§10. Знакопередающиеся ряды	19
§11. Абсолютно и условно сходящиеся ряды	22
§12. Перестановка членов ряда	23
<b>ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ</b>	<b>27</b>
§1. Сходимость функциональных последовательностей	27
§2. Сходимость функциональных рядов	28
§3. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов	30
§4. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда	32
§5. Признак Вейерштрасса	33
§6. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций	34
§7. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов	35
<b>ГЛАВА 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ</b>	<b>39</b>
§1. Степенной ряд и его сходимость	39
§2. Радиус сходимости степенного ряда	40
§3. Равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда	42
§4. Ряд Тейлора и его сходимость	45



§5. Разложение функции в степенной ряд	47
§6. Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций	47
§7. Приближенные вычисления с помощью рядов	50
<b>ГЛАВА 4. РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ</b>	<b>52</b>
§1. Сходящиеся последовательности и ряды комплексных чисел	52
§2. Абсолютная сходимость. Умножение абсолютно сходящихся рядов	54
§3. Степенные ряды	57
§4. Показательная функция комплексной переменной	57
<b>ГЛАВА 5. РЯДЫ ФУРЬЕ</b>	<b>59</b>
§1. Функциональные пространства	59
§2. Ряд Фурье по ортогональной системе	61
§3. Тригонометрический ряд Фурье	63
§4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций	65
§5. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$	66
§6. Разложение в ряд Фурье непериодической функции	67
§7. Ряд Фурье в комплексной форме	68
§8. Понятие об интеграле Фурье	69
<b>ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ИЛИ ЗАЧЁТУ</b>	<b>72</b>
<b>ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ИЛИ ЗАЧЁТУ</b>	<b>74</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>76</b>

## Предисловие

Пособие предназначено для студентов педагогических вузов с профилями подготовки: „Математика и информатика“, „Математика и физика“, „Информатика и математика“, „Физика и математика“. В его основу положены лекции, читавшиеся автором в Липецком государственном педагогическом университете. Книга содержит основы теории числовых рядов с действительными и комплексными членами, вопросы теории функциональных последовательностей и рядов, степенных рядов и рядов Фурье, примерные вопросы и задачи к экзамену или зачету.

Первая глава содержит основы теории числовых рядов. В ней приводятся основные понятия числовых рядов, рассматриваются действия над рядами, остаток ряда, необходимый признак сходимости ряда, гармонический ряд и ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, критерий Коши сходимости числовой последовательности и числового ряда. Изучается сходимость положительных рядов с применением критерия и признаков сравнения, признаков Даламбера, Коши и интегрального признака сходимости. Приводится признак Лейбница сходимости знакопеременующегося ряда, изучаются абсолютно и условно сходящиеся ряды и перестановка их членов.

Во второй главе изучаются: сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, критерий их равномерной сходимости, признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Изучаются: предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

В третьей главе изучаются: степенные ряды, их сходимость, радиус сходимости, равномерная сходимость степенного ряда, интегрирование и дифференцирование степенного ряда, ряд Тейлора, разложение функции в степенной ряд и разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций, приближенные вычисления с применением рядов.

Ряды с комплексными членами изучаются в четвертой главе. Рассматриваются сходящиеся последовательности и ряды комплексных чисел, абсолютная сходимость числовых рядов и их умножение, степенные ряды и показательная функция в комплексной области.

В заключительной главе изучаются ряды Фурье по ортогональной системе функций, тригонометрические ряды Фурье, ряды Фурье для четных и нечетных функций, ряды Фурье с периодом  $2l$ , рассматривается разложение в ряд Фурье непериодической функции, ряд Фурье в ком-