

А.С. Калитвин

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

Часть IV
Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

Липецк – 2017

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Липецкий государственный педагогический университет
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского"

А.С. Калитвин

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

Часть IV
Определённый интеграл

Учебное пособие для студентов
педагогических вузов

Липецк-2017

УДК 517
ББК 22.1
К 172

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и физики
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского,
протокол № 2 от 06.10.2017 г.

Калитвин, А.С. Лекции по математическому анализу. Часть IV. Определённый интеграл:
Учебное пособие/А.С. Калитвин–Липецк:ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского,2017.–112 с.

ISBN 978-5-88526-900-1 (Ч. 4)
ISBN 978-5-88526-846-2

Пособие является четвёртой частью курса лекций по математическому анализу для студентов математических профилей подготовки педагогических вузов. В его основу положены лекции, читавшиеся автором в Липецком государственном педагогическом университете.

В пособии излагаются основы теории определённых интегралов, методы их приближённого вычисления, приложения в геометрии и физике, вопросы теории несобственных интегралов. Пособие содержит упражнения для самостоятельной работы студентов, примерные вопросы к экзамену или зачёту.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор Л.Н. Ляхов,

ФГБОУ ВО „Воронежский государственный университет“,

к.ф.-м.н., доцент В.А. Калитвин,

ФГБОУ ВО „Липецкий государственный

педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского“

УДК 517
ББК 22.1
К 172

ISBN 978-5-88526-900-1 (Ч. 4)
ISBN 978-5-88526-846-2

© А.С. Калитвин, 2017
© ФГБОУ ВО „Липецкий государственный
педагогический университет имени
П.П. Семенова-Тян-Шанского“, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
ГЛАВА I. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ	6
§1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла	6
1.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции	6
1.2. Задача о вычислении работы переменной силы	7
1.3. Другие задачи	8
§2. Основные определения. Необходимое условие интегрируемости по Риману	8
2.1. Основные определения	9
2.2. Необходимое условие интегрируемости	10
§3. Верхние и нижние суммы Дарбу	11
§4. Критерий существования определённого интеграла	15
§5. Классы и свойства интегрируемых функций	16
5.1. Интегрируемость непрерывной функции	16
5.2. Интегрируемость монотонной функции	17
5.3. Дополнительные замечания	17
5.4. Свойства интегрируемых функций	19
§6. Основные свойства определённого интеграла	23
6.1. Линейность интеграла на множестве интегрируемых функций	24
6.2. Интегрирование неравенств	26
6.3. Теорема о среднем	28
§7. Определённый интеграл как функция верхнего предела	31
§8. Формула Ньютона-Лейбница	33
§9. Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле	35
9.1. Интегрирование по частям в определённом интеграле	35
9.2. Замена переменной в определённом интеграле	36
§10. Определение логарифмической функции с помощью интеграла	38
§11. Приближённое вычисление определённых интегралов	39
11.1. Формулы прямоугольников и трапеций	39
11.2. Формула Симпсона	42
ГЛАВА II. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРИИ	44
§1. Функции с ограниченным изменением	44
1.1. Полное изменение функции	44
1.2. Примеры функций с ограниченным изменением	45
1.3. Линейность в множестве функций с ограниченным изменением	46
1.4. Представление функции с ограниченным изменением в виде разности двух возрастающих функций	47
§2. Спрямолинейная дуга и её длина	48
2.1. Понятие длины дуги	48
2.2. Критерий спрямолинейности кривой	49
2.3. Вычисление длины дуги	50
2.4. Дифференциал дуги	55

§3. Площадь плоской фигуры	56
3.1. Определение квадратуемой фигуры и её площади	56
3.2. Признаки квадратуемости плоских фигур	57
3.3. Аддитивность и монотонность площадей квадратуемых фигур	60
3.4. Вычисление площадей плоских фигур	61
3.5. Вычисление площадей в полярных координатах	65
§4. Объём тела	67
4.1. Кубируемые тела и их объёмы	67
4.2. Вычисление объёма тела с применением определённого интеграла	69
§5. Площадь поверхности вращения	73
ГЛАВА III. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ФИЗИКЕ	76
§1. Схема применения определённого интеграла	76
§2. Вычисление массы стержня и работы переменной силы	77
§3. Центр масс плоской линии и плоской фигуры	78
3.1. Координаты центра масс системы материальных точек	78
3.2. Вычисление центра масс плоской линии	78
3.3. Вычисление центра масс плоской фигуры	80
ГЛАВА IV. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	82
§1. Несобственные интегралы на бесконечных промежутках	82
1.1. Определения и примеры	82
1.2. Формула Ньютона-Лейбница	84
1.3. Простейшие свойства несобственных интегралов на бесконечных промежутках	85
1.4. Сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций	86
1.5. Условия сходимости несобственных интегралов в общем случае	89
1.6. Признаки Абеля и Дирихле	91
§2. Несобственные интегралы от неограниченных функций	94
2.1. Определения и примеры	94
2.2. Формула Ньютона-Лейбница	96
2.3. Условия существования интегралов	97
2.4. Главные значения несобственных интегралов	99
§3. Свойства несобственных интегралов	100
3.1. Свойства, выражаемые равенствами и неравенствами	100
3.2. Теоремы о среднем	101
3.3. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле	102
ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ИЛИ ЗАЧЁТУ	104
ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ИЛИ ЗАЧЁТУ	106
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	109

Предисловие

Пособие предназначено для студентов педагогических вузов с профилями подготовки: „Математика и физика“, „Информатика и математика“, „Физика и математика“. В его основу положены лекции, читавшиеся автором в Липецком государственном педагогическом университете. Книга содержит основы теории определённых интегралов, их приложения в геометрии и физике, вопросы теории несобственных интегралов.

Первый раздел содержит основы теории определённого интеграла Римана. Рассматриваются задачи, приводящие к понятию определённого интеграла, основные определения и необходимое условие интегрируемости функции по Риману, подробно изучаются верхние и нижние суммы Дарбу ограниченной функции, применяемые при доказательстве критерия существования определённого интеграла. С применением этого критерия доказывается интегрируемость непрерывной функции, а также монотонных и ограниченных функций. Детально излагаются основные свойства определённого интеграла, рассматривается интеграл с переменным верхним пределом, доказывается существование первообразной непрерывной функции, устанавливаются формулы: Ньютона-Лейбница, интегрирования по частям и замены переменной в определённом интеграле. С помощью определённого интеграла вводится понятие натурального логарифма и изучаются его свойства. Рассматриваются формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона для приближённого вычисления интегралов.

В следующих двух разделах рассматриваются приложения определённого интеграла в геометрии и физике.

В заключительном разделе изучаются несобственные интегралы на бесконечных промежутках и от неограниченных функций, устанавливаются свойства таких интегралов и признаки их сходимости, рассматриваются абсолютно сходящиеся несобственные интегралы.

Более активному усвоению материала способствуют приведённые в тексте упражнения для самостоятельной работы, примерные вопросы и задачи к экзамену или зачету.

Автор благодарен своему сыну доценту кафедры математики и физики Липецкого государственного педагогического университета имени П.П.Семенова-Тян-Шанского В.А. Калитвину и старшему преподавателю этой же кафедры А.И. Иноземцеву за помощь в подготовке рукописи книги к печати.

Текст пособия набран в \LaTeX 2 ϵ .