

А.С. Калитвин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И  
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ  
ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Липецк – 2019

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
"Липецкий государственный педагогический университет  
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского"

А.С. Калитвин

Дифференциальное и интегральное  
исчисление функций нескольких переменных

Учебное пособие

Липецк – 2019

УДК 517  
ББК 22.161.1  
К 172

Печатается по решению кафедры  
математики и физики ФГБОУ ВО «ЛГПУ  
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского».  
Протокол №2 от 2 октября 2019 г.

**Калитвин, А.С. Дифференциальное и интегральное исчисление функций  
нескольких переменных: Учебное пособие / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ  
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2019. – 81 с.**

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002)

ISBN 978-5-907168-66-4

Пособие способствует улучшению организации самостоятельной работы студентов педагогических вузов, а представленный в нем материал соответствует требованиям государственных образовательных стандартов по педагогическим специальностям «Математика» и «Математика с дополнительной специальностью».

Рекомендовано для слушателей программ дополнительного профессионального образования соответствующего направления подготовки.

УДК 517  
ББК 22.161.1  
К 172

**Рецензенты:**

*Е.В. Фролова*, директор института естественных, математических и технических наук, кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»;

*Е.А. Рязанцева*, кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ».

ISBN 978-5-907168-66-4

© ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени  
П.П. Семенова-Тян-Шанского», 2019  
© А.С. Калитвин, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	4
1. Функции нескольких переменных . . . . .	5
2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных . . . . .	8
3. Частные производные и производные по направлению. Градиент . . . . .	11
4. Дифференциал и его приложения . . . . .	15
5. Производные и дифференциалы сложных функций и функций, заданных неявно . . . . .	18
6. Частные производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	21
7. Экстремумы. Задачи на наибольшее и наименьшее значения . . . . .	24
8. Условный экстремум . . . . .	29
9. Контрольная работа. Дифференциальное исчисление . . . . .	32
10. Двойной интеграл: определение, вычисление . . . . .	35
11. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	40
12. Приложения двойных интегралов . . . . .	45
13. Тройной интеграл . . . . .	50
14. Приложения тройных интегралов . . . . .	57
15. Криволинейные интегралы . . . . .	59
16. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пу- ти интегрирования . . . . .	62
17. Контрольная работа. Интегральное исчисление . . . . .	67
Контрольные вопросы . . . . .	71
Ответы . . . . .	74
Литература . . . . .	80