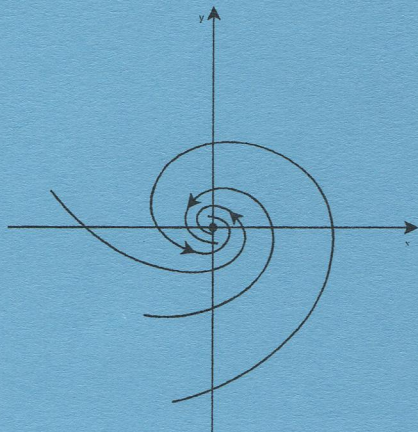


А.С. Калитвин

КУРС ЛЕКЦИЙ  
ПО ОБЫКНОВЕННЫМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ  
УРАВНЕНИЯМ





А.С. Калитвин

**КУРС ЛЕКЦИЙ  
ПО ОБЫКНОВЕННЫМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ  
УРАВНЕНИЯМ**

Учебное пособие

Липецк 2007



ББК 22.161.6

Калитвин А.С. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — 340 с.

ISBN 978-5-88526-288-0

Печатается по решению кафедры математического анализа, алгебры и геометрии и РИС ЛГПУ

*Рецензенты:* кафедра высшей математики Липецкого государственного технического университета, доктор физико-математических наук, профессор В.М. Тюрин, доктор физико-математических наук, профессор Л.Н. Ляхов, Воронежская государственная технологическая академия

Книга предназначена для студентов физико-математических специальностей университетов и содержит учебный материал, достаточный для обеспечения требований государственных образовательных стандартов по курсу дифференциальных уравнений.

Теоретический материал излагается достаточно подробно, используемые в книге сведения из курсов математического анализа и алгебры содержатся в Приложении.

Рассматриваются примеры решения типовых задач. В конце каждой главы приводятся упражнения, что позволяет активно использовать книгу при самостоятельной работе над курсом и на практических занятиях.

ISBN 978-5-88526-288-0

© А.С. Калитвин, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
<b>ГЛАВА I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</b>	<b>10</b>
1. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям	10
1.1. Задача об отыскании первообразной	11
1.2. Задача о распаде радиоактивного вещества	12
1.3. Задача об отыскании закона движения материальной точки с постоянным ускорением	13
2. Основные понятия	14
3. Поле направлений. Метод изоклин. Ломаные Эйлера	17
3.1. Поле направлений и метод изоклин	17
3.2. Ломаные Эйлера	20
4. Дифференциальные уравнения первого порядка	22
4.1. Уравнения с разделяющимися переменными	23
4.2. Однородные уравнения (дифференциальные уравнения с однородными функциями)	27
4.3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	30
4.4. Линейные уравнения	31
4.5. Уравнения Бернулли и Риккати	33
4.6. Уравнения в полных дифференциалах	36
4.7. Интегрирующий множитель	38
5. Уравнения, допускающие понижения порядка	40
6. Теоремы существования и единственности	44
6.1. Теорема Пеано	44
6.2. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка	50
6.3. Существование и единственность решения задачи Коши для нормальной системы	52
6.4. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка	57
6.5. Продолжение решений	60



7. Теоремы о гладкости решений дифференциальных уравнений	63
8. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и от правой части уравнения	65
9. Зависимость решений от параметров	67
10. Уравнения, не разрешенные относительно производной	72
10.1. Существование решений	73
10.2. Огибающие и особые решения	74
10.3. Методы решения уравнения $F(x, y, y') = 0$	79
10.4. Уравнение Клеро	80
10.5. Уравнение Лагранжа	81
<b>Упражнения</b>	<b>84</b>
<b>ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ</b>	<b>91</b>
11. Теорема о существовании и единственности решения нормальной системы линейных уравнений	92
12. Однородное линейное уравнение $n$ -го порядка	93
12.1. Пространство решений однородного линейного уравнения $n$ -го порядка	93
12.2. Фундаментальные системы решений. Вронскиан	95
12.3. Теорема о структуре общего решения однородного уравнения	104
12.4. Формула Остроградского	106
13. Неоднородное линейное уравнение	109
13.1. Теорема о структуре общего решения	109
13.2. Метод вариации произвольных постоянных	111
14. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	115
14.1. Линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	115
14.2. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	118
15. Свободные и вынужденные колебания	129
15.1. Исследование свободных колебаний	130
15.2. Исследование вынужденных колебаний. Резонанс	132

16. Линейные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	135
16.1. Линейные однородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	137
16.2. Линейные неоднородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	142
17. Краевые задачи	147
17.1. Определения и примеры	147
17.2. Разрешимость краевой задачи	151
17.3. Функция Грина	153
18. Системы линейных дифференциальных уравнений	160
18.1. Общие свойства систем линейных уравнений	160
18.2. Однородные линейные системы	163
18.3. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Вронскиан	165
18.4. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица	168
18.5. Неоднородные линейные системы	172
18.6. Формула Якоби для определителя Вронского	174
19. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	176
19.1. Метод исключения неизвестных	177
19.2. Метод Эйлера решения однородной системы	178
19.3. Случай простых корней характеристического уравнения	180
19.4. Решение однородной линейной системы в общем случае корней характеристического уравнения	185
19.5. Линейные неоднородные системы	195
19.6. Применение матричной экспоненты к линейным системам с постоянными коэффициентами	201
<b>Упражнения</b>	<b>203</b>
<b>ГЛАВА III. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ. УСТОЙЧИВОСТЬ</b>	<b>209</b>
20. Автономные системы	209
21. Траектории и их предельное поведение	214
21.1. Виды траекторий	214
21.2. Предельное поведение траекторий	216



22. Устойчивость решений по Ляпунову	219
22.1. Определения и примеры	219
22.2. Теоремы Ляпунова и Четаева	224
23. Устойчивость линейных систем	231
24. Устойчивость по первому приближению	236
25. Простейшие типы точек покоя	240
<b>Упражнения</b>	<b>255</b>

#### ГЛАВА IV. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 257

26. Первые интегралы и симметричная форма системы дифференциальных уравнений	257
26.1. Первые интегралы	258
26.2. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений	265
27. Линейные уравнения с частными производными первого порядка	267
28. Квазилинейные уравнения	271
28.1. Интегральные поверхности и характеристики	271
28.2. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения	275
28.3. Задача Коши для квазилинейного уравнения	277
<b>Упражнения</b>	<b>281</b>

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 283

29. Метрические, нормированные и евклидовы пространства	283
29.1. Метрическое пространство	283
29.2. Нормированное векторное пространство	283
29.3. Евклидово пространство	286
29.4. Пространство $R^m$	288
29.5. Пространство $C_{[a,b]}$	289
29.6. Пространство $X = C([a,b], R^m)$	290
29.7. Сходящиеся последовательности	290
29.8. Сходимость в $R^m$	292
29.9. Сходимость в $C_{[a,b]}$	293
29.10. Сходимость в $X = C([a,b], R^m)$	294

29.11. Ограниченные множества в метрическом пространстве	294
30. Полные метрические пространства	297
30.1. Полнота пространства	297
30.2. Полнота $R^m$	299
30.3. Полнота $C_{[a,b]}$	299
30.4. Полнота $X = C([a,b], R^m)$	300
31. Теорема Банаха о сжимающем отображении	301
32. Компактность в метрическом пространстве	305
33. Матричная экспонента	311
33.1. Пространство матриц $m \times m$	311
33.2. Матричная экспонента и ее свойства	317
33.3. Вычисление матричной экспоненты	320
34. Неявные функции и зависимость функций	328
34.1. Теоремы о неявных функциях	328
34.2. Зависимость функций	331

**Ответы 332**

**Список литературы 339**