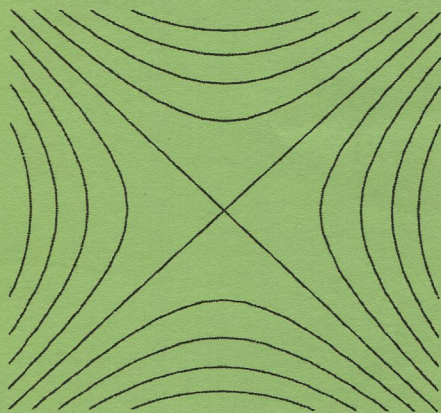


А.С. Калитвин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ



А.С. Калитвин

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Липецк 2008

ББК 22.161.6

Калитвин А.С. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. — Липецк: ЛГПУ, 2008. — 302 с.

ISBN 978-5-88526-388-7

Печатается по решению кафедры математического анализа, алгебры и геометрии и РИС ЛГПУ

*Рецензенты:* кафедра высшей математики Липецкого государственного технического университета, доктор физико-математических наук, профессор В.М. Тюрин, доктор физико-математических наук, профессор Л.Н. Ляхов, Воронежская государственная технологическая академия

Книга предназначена для студентов педагогических специальностей университетов и содержит учебный материал, достаточный для обеспечения требований государственных образовательных стандартов по курсу дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Теоретический материал излагается достаточно подробно, используемые в книге сведения из курса математического анализа содержатся в Приложении I.

Рассматриваются примеры решения типовых задач. В конце глав I-III приводятся упражнения, что позволяет активно использовать книгу при самостоятельной работе над курсом и на практических занятиях.

Приложение II содержит государственный образовательный стандарт и систему изучения дисциплины "Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными".

Работа поддержана грантом Администрации Липецкой области за 2007 год.

ISBN 978-5-88526-388-7

© А.С. Калитвин, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ПРЕДИСЛОВИЕ

8

### ГЛАВА I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

10

1. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям	10
1.1. Задача об отыскании первообразной	11
1.2. Задача о распаде радиоактивного вещества	12
1.3. Задача об отыскании закона движения материальной точки с постоянным ускорением	13
2. Основные понятия	14
3. Поле направлений. Метод изоклин. Ломаные Эйлера	17
3.1. Поле направлений и метод изоклин	17
3.2. Ломаные Эйлера	20
4. Дифференциальные уравнения первого порядка	21
4.1. Уравнения с разделяющимися переменными	22
4.2. Однородные уравнения (дифференциальные уравнения с однородными функциями)	26
4.3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	28
4.4. Линейные уравнения	30
4.5. Уравнения Бернулли и Риккати	32
4.6. Уравнения в полных дифференциалах	35
4.7. Интегрирующий множитель	37
5. Уравнения, допускающие понижения порядка	39
6. Теоремы существования и единственности	42
6.1. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка	43
6.2. Существование и единственность решения задачи Коши для нормальной системы	44
6.3. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка	49
6.4. Продолжение решений	52

7. Теоремы о гладких и голоморфных решениях дифференциальных уравнений	55
7.1. Условия гладкости решений	55
7.2. Теоремы о голоморфных решениях	57
8. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и от правой части уравнения	60
9. Зависимость решений от параметров	61
10. Уравнения, не разрешенные относительно производной	66
10.1. Существование решений	67
10.2. Огибающие и особые решения	68
10.3. Методы решения уравнения $F(x, y, y') = 0$	73
10.4. Уравнение Клеро	74
10.5. Уравнение Лагранжа	75
<b>Упражнения</b>	<b>78</b>
<b>ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ</b>	<b>85</b>
11. Теорема о существовании и единственности решения нормальной системы линейных уравнений	86
12. Однородное линейное уравнение $n$ -го порядка	87
12.1. Пространство решений однородного линейного уравнения $n$ -го порядка	87
12.2. Фундаментальные системы решений. Вронскиан	89
12.3. Теорема о структуре общего решения однородного уравнения	98
12.4. Формула Остроградского	100
13. Неоднородные линейные уравнения	103
13.1. Теорема о структуре общего решения	103
13.2. Метод вариации произвольных постоянных	105
14. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	109
14.1. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	109
14.2. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	112

15. Свободные и вынужденные колебания	122
15.1. Исследование свободных колебаний	123
15.2. Исследование вынужденных колебаний. Резонанс	125
16. Линейные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	129
16.1. Линейные однородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	130
16.2. Линейные неоднородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	135
17. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при помощи рядов	140
17.1. Применение степенных рядов	141
17.2. Уравнение Бесселя	145
17.3. О применении тригонометрических рядов	150
18. Системы линейных дифференциальных уравнений	151
18.1. Общие свойства систем линейных уравнений	151
18.2. Однородные линейные системы	154
18.3. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Вронскиан	156
18.4. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица	159
18.5. Неоднородные линейные системы	162
18.6. Формула Якоби для определителя Вронского	164
19. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	167
19.1. Метод исключения неизвестных	167
19.2. Метод Эйлера решения однородной системы	169
19.3. Случай простых корней характеристического уравнения	170
19.4. Решение однородной линейной системы в общем случае корней характеристического уравнения	175
19.5. Линейные неоднородные системы	185
19.6. Применение матричной экспоненты к линейным системам с постоянными коэффициентами	191
<b>Упражнения</b>	<b>193</b>

<b>ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА</b>	<b>199</b>
---	------------

<b>20. Первые интегралы и симметричная форма системы дифференциальных уравнений</b>	199
20.1. Первые интегралы . . . . .	200
20.2. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений . . . . .	205
<b>21. Линейные уравнения с частными производными первого порядка</b>	208
<b>22. Квазилинейные уравнения</b>	212
22.1. Интегральные поверхности и характеристики . . . . .	212
22.2. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения . . . . .	215
22.3. Задача Коши для квазилинейного уравнения . . . . .	215
<b>Упражнения</b>	<b>220</b>
<b>ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ</b>	
<b>23. Основные типы уравнений математической физики</b>	222
<b>24. Уравнение колебаний струны</b>	224
24.1. Вывод уравнения колебаний струны . . . . .	224
24.2. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье . . . . .	226
<b>25. Уравнение теплопроводности</b>	231
25.1. Вывод уравнения теплопроводности для стержня . . . . .	231
25.2. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье . . . . .	234
<b>ГЛАВА V. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</b>	
<b>26. Первый период истории дифференциальных уравнений</b>	239
26.1. Работы Ньютона, Лейбница и братьев Бернулли . . . . .	239
26.2. Развитие в XVIII веке теории обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	242
26.3. Развитие в XVIII веке теории уравнений с частными производными	246
<b>27. Из истории развития в XIX и начале XX вв. теории дифференциальных уравнений</b>	249
27.1. Существование и единственность решений дифференциальных уравнений . . . . .	249

27.2. Интегрирование в квадратурах и развитие теории линейных дифференциальных уравнений . . . . .	252
27.3. Вклад в теорию уравнений с частными производными . . . . .	253
27.4. Применение теории групп и создание качественной теории дифференциальных уравнений . . . . .	255
<b>28. Некоторые направления развития теории дифференциальных уравнений в XX веке отечественными учеными</b>	<b>257</b>

**ОТВЕТЫ** **262**

**ПРИЛОЖЕНИЕ I** **269**

<b>29. Метрические пространства</b>	269
<b>30. Полные метрические пространства</b>	276
<b>31. Теорема Банаха о сжимающем отображении</b>	279
<b>32. Неявные функции и зависимость функций</b>	283
32.1. Теоремы о неявных функциях . . . . .	283
32.2. Зависимость функций . . . . .	286

**ПРИЛОЖЕНИЕ II** **287**

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ** **300**