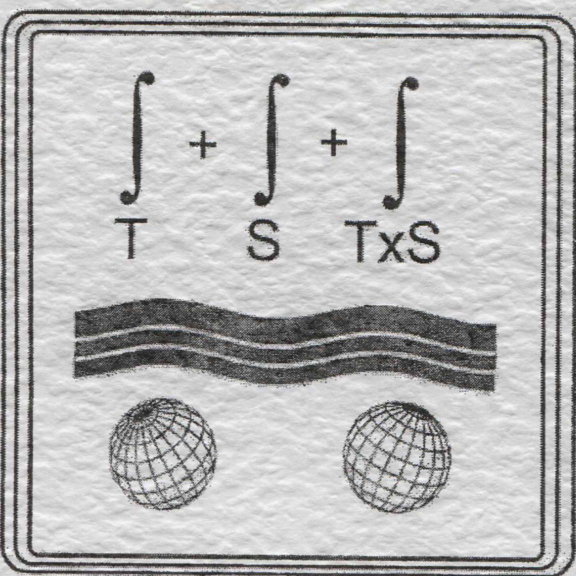
А.С. Калитвин

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ



А.С. Калитвин

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Липецк 2002

УДК 517.9.

Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.

ISBN 5-88526-066-4

Научный редактор: доктор физико-математических наук, профессор П.П. Забрейко

Рецензенты: кафедра математического анализа Челябинского государственного университета; доктор физико-математических наук, профессор В.М. Тюрин

Монография содержит основы теории нелинейных операторов с частными интегралами в функциональных пространствах.

В книге изучаются действие, ограниченность, непрерывность, равномерная непрерывность, липшицивость, гельдеровость, дифференцируемость и другие свойства нелинейных операторов с частными интегралами. Излагаются свойства квазибанаховых пространств, оператора суперпозиции и линейных операторов с частными интегралами. Приводятся различные теоремы о разрешимости уравнений Гаммерштейна и Урысона с частными интегралами.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области функционального анализа, интегральных уравнений и их приложений.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Администрации Липецкой области. Грант 1Е, 2001 г.

Библиогр. 364 назв.

ISBN 5-88526-066-4

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ 8

§ 1. **Функциональные пространства** 8
- 1.1. Квазинормированные идеальные пространства . . . 8
- 1.2. Специальные классы КНИП 17
- 1.3. Пересечение и сумма КНИП 18
- 1.4. Пространства со смешанными квазинормами 19
- 1.5. Пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича со смешанной нормой 22

§ 2. **Общие свойства линейных операторов с частными интегралами** 28
- 2.1. Линейные операторы с частными интегралами . . . 28
- 2.2. Непрерывность операторов с частными интегралами 29
- 2.3. Регулярность операторов с частными интегралами 31
- 2.4. Теоремы о двойственном операторе 34
- 2.5. Алгебры операторов с частными интегралами . . . 36
- 2.6. Операторы с частными интегралами в пространствах со смешанными нормами 40
- 2.7. Операторы с частными интегралами в пространствах Лебега со смешанной нормой 44
- 2.8. Частично интегральные операторы в пространствах Орлича со смешанной нормой 48
- 2.9. Операторы с частными интегралами в пространстве непрерывных функций 52

ГЛАВА 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ 61

§ 3. **Нелинейные операторы Урысона и Гаммерштейна с частными интегралами** 61
- 3.1. Множества $\Sigma_E(x_0, r)$ 61
- 3.2. Оператор суперпозиции и его свойства 65
- 3.3. Область определения оператора Урысона с частными интегралами 96
- 3.4. Действие и ограниченность операторов Урысона с частными интегралами 100
- 3.5. Другие свойства оператора Урысона с частными интегралами 101
- 3.6. Операторы Гаммерштейна с частными интегралами 104
- 3.7. Отдельные классы операторов Урысона с частными интегралами 106

§ 4. **Непрерывность нелинейных операторов с частными интегралами** 108
- 4.1. Предварительные замечания 108
- 4.2. Непрерывность операторов Гаммерштейна с частными интегралами 110
- 4.3. Непрерывность операторов Урысона с частными интегралами со значениями в правильных КБИП . 113

4.4. Операторы Урысона с частными интегралами в КБИП без условия правильности 122
4.5. Условия равномерной непрерывности, липшицивости и гельдеровости 126
4.6. Об одном классе операторов Урысона с частными интегралами 130
§ 5. Дифференцирование нелинейных операторов с частными интегралами 133
5.1. Предварительные замечания 133
5.2. Производные операторов Гаммерштейна с частными интегралами 134
5.3. Производные операторов Урысона с частными интегралами 140
5.4. Асимптотические производные нелинейных операторов с частными интегралами 146
5.5. Производные высших порядков 150

ГЛАВА 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ **152**
§ 6. Уравнения Гаммерштейна с частными интегралами 152
6.1. Уравнения Гаммерштейна с частными интегралами и переменными пределами интегрирования . . . 152
6.2. Теоремы о разрешимости общих классов уравнений Гаммерштейна с частными интегралами 157
6.3. Вариационный метод и метод монотонных операторов 159
§ 7. Уравнения Урысона с частными интегралами 166
7.1. Условия разрешимости уравнений Урысона с частными интегралами 166
7.2. О применении метода Ньютона - Канторовича к уравнениям Урысона с частными интегралами . . . 168
7.3. Метод Ньютона-Канторовича для уравнения Урысона с частными интегралами в пространстве $C(T \times S)$ 174
7.4. Метод Ньютона-Канторовича для уравнения Урысона с частными интегралами в $L^\infty(T \times S)$ 177
7.5. О применении метода Ньютона - Канторовича к уравнениям Урысона с частными интегралами в $L^p(T \times S)(1 \le p < \infty)$ 180

ЛИТЕРАТУРА **182**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография содержит основы теории операторов вида

$$(Ax)(t,s) = f(t,s,x(t,s)) + \int_T a_1(t,s,\tau,x(\tau,s))d\tau$$

$$+ \int_S a_2(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + \int_{T\times S} a_3(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma \quad (1)$$

в функциональных пространствах.

Оператор (1) называют нелинейным оператором с частными интегралами, так как он содержит интегралы, в которых функция x входит нелинейно и интегрируется по части переменных. Частным случаем оператора (1) является линейный оператор

$$(Kx)(t,s) = c(t,s)x(t,s)) + \int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau$$

$$+ \int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_{T\times S} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma. \quad (2)$$

Операторы (1) и (2) принципиально отличаются от интегральных операторов Урысона и линейных интегральных операторов; например, при $f = a_2 = a_3 = c = m = n = 0$, $a_1(t,s,\tau,u) = \sin u, l = 1$ и $T = S = [0,1]$ (1) — не компактный, (2) — не интегральный, а $I - K$ — не фредгольмов операторы. Линейные и нелинейные интегральные операторы изучены в настоящее время достаточно полно [28, 29, 68, 69, 191, 202, 205, 206, 208, 209, 211, 308, 346]. Операторы с частными интегралами интенсивно исследуются лишь в последние годы. Основы теории линейных операторов с частными интегралами представлены в монографиях [119, 326]. Систематическое изложение свойств нелинейных операторов с частными интегралами в монографической литературе до сих пор отсутствует, несмотря на то, что к уравнениям с такими операторами приводятся разнообразные прикладные задачи [119, 326]. Как и в случае интегральных уравнений, исследование уравнений с частными интегралами предполагает решение следующих задач: 1) выбор или построение пространств, в которых операторы, входящие в уравнения, обладают достаточно хорошими свойствами; 2) применение общих методов функционального анализа исследования операторных уравнений.

Настоящая монография посвящена первой из указанных задач. В книге изучаются: действие, ограниченность, непрерывность, равномерная непрерывность, липшицивость, гельдеровость, дифференцируемость и другие свойства нелинейных операторов с частными интегралами. Излагаются свойства квазибанаховых идеальных пространств (КБИП), оператора суперпозиции и линейных операторов с частными интегралами. В качестве