

Н.Н. Волотов

СЛОЖНЫЕ РАДИКАЛЫ:  
ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ТЕХНОЛОГИИ  
ИХ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

$$\begin{aligned} & \sqrt{a \pm n\sqrt{b}} \quad (a, b \in R^+, n \in N; \sqrt{b} \in J, a > n\sqrt{b}); \\ & \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}, \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}, \left( \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \right)^2 \\ & (a \in R \setminus \{0\}, b \in R^+; \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}, \sqrt[3]{a^2 + b \pm 2a\sqrt{b}} \in J). \end{aligned}$$

Положительный корень  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  уравнения  $x^2 - x - 1 = 0$ , равный золотому числу  $\Phi$ , допускает представления сложными

$$\begin{aligned} & \text{радикалами: } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{2} - 1 = \\ & = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} - 1 = \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt[9]{38 + 17\sqrt{5}} \end{aligned}$$



Липецк – 2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО»

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ, МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Н.Н. ВОЛОТОВ

СЛОЖНЫЕ РАДИКАЛЫ: ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ  
И ТЕХНОЛОГИИ ИХ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Липецк – 2019

УДК 511.14  
ББК 22.10  
В 68

Печатается по решению кафедры математики и физики  
ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского».  
Протокол № 2 от 02 октября 2019 г.

**В 68 Волотов, Н.Н.** Сложные радикалы: достаточные условия и технологии их рационализации: учебное пособие / Н.Н. Волотов. – Липецк: ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2019. – 145 с.

ISBN 978-5-907168-51-0

В работе изложены результаты исследования автора по выявлению достаточных условий, выделению алгоритмов и технологий рационализации сложных квадратных и сложных кубических радикалов, их сумм, произведений и квадратов сумм, в том числе и с параметрами, на множестве вещественных чисел. Приведены:

- большое количество примеров и упражнений, решаемых с помощью этих алгоритмов;
- вариативные методы, в том числе и метод Кардано, решения рациональных кубических уравнений, вещественные корни которых равны суммам сложных кубических радикалов;
- метод рационализации сумм сложных кубических радикалов, базирующийся на проверке корней уравнения;
- новые, впервые полученные представления золотого числа сложными радикалами.

Учебное пособие предназначено как обучающимся, так и учителям математики средних учебных заведений и преподавателям математических дисциплин физико-математических и технических ВУЗов при проведении всех видов образовательных занятий с учащимися на разных этапах их обучения, для подготовки к Единому государственному экзамену и олимпиадам по математике.

**Р е ц е н з е н т ы:** Блюмин С.Л., доктор физико-математических наук, профессор; Липецкий государственный технический университет;

Ляхов Л.Н., доктор физико-математических наук, профессор; Воронежский государственный университет

УДК 511.14  
ББК 22.10  
В 68

ISBN 978-5-907168-51-0

© ФГБОУ ВО "Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского", 2019  
© Волотов Н.Н.. 2019

*Посвящается светлой памяти  
жены Валентины Николаевны – Учителя от Бога,  
Заслуженного учителя школы Российской Федерации,  
мамы Аграфены Захаровны и отца Николая Ивановича,  
бабушек и дедушек        Нины Лазаревны,  
Василисы Исидоровны и Ивана Лазаревича Волотовых,  
Марии Игнатьевны и Захара Трофимовича Суворовых*

*П р е д и с л о в и е*

Работа посвящена проблеме рационализации сложных радикалов. Она состоит из двух глав, содержащих восемь параграфов, и приложения. В ней изложены результаты исследования автора по выявлению новых достаточных условий, соответствующих алгоритмов и технологий рационализации сложных квадратных и сложных кубических радикалов, в том числе и с параметрами, на множествах рациональных и вещественных чисел, их сумм, произведений и квадратов этих сумм. С помощью одного из этих алгоритмов впервые получены представления золотого числа сложными радикалами. Рассмотрены вариативные методы решения:

- рациональных уравнений четвёртой степени, корни которых – сложные квадратные радикалы, допускающие рационализацию;
- иррациональных уравнений, содержащих сложные квадратные радикалы;
- рациональных кубических уравнений, один из корней которых равен сумме сложных кубических радикалов;
- иррациональных уравнений, содержащих алгебраические суммы двух и трёх простых или сложных кубических радикалов.

Найдены новые условия, позволяющие исключить появление посторонних корней при решении таких иррациональных уравнений традиционным методом – последовательным возведением его в соответствующую – вторую или третью степень. Приведено большое количество примеров рационализации

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие .....	3
Глава I. Достаточные условия и технологии рационализации	
сложных квадратных радикалов .....	8
§ 1. Сложные квадратные радикалы .....	8
п. 1.1. Постановка задачи .....	8
п. 1.2. О достаточных условиях и методах рационализации сложных	
квадратных радикалов .....	9
п. 1.3. О рационализации СКвР частных видов .....	12
п. 1.4. О рационализации выражений $\sqrt{\sqrt{a \cdot b} + c \cdot \sqrt{a} + d \cdot \sqrt{b} + \frac{p}{q}}$	
$(a, b, c, d, p, q \in Q : \sqrt{a} \cdot b, \sqrt{a}, \sqrt{b} \in J)$ .....	16
§ 2. О методах решения уравнений, содержащих сложные квадратные	
радикалы .....	19
§ 3. Примеры и упражнения к главе I .....	24
Глава II. Достаточные условия, алгоритмы и технологии	
рационализации сложных кубических радикалов	
К истории проблемы и постановка задачи .....	36
§ 4. Рациональные уравнения третьей степени .....	39
п. 4.1. О стандартных методах нахождения вещественных корней	
уравнений .....	40
п. 4.2. Метод и формулы Кардано .....	46
§ 5. О достаточных условиях и алгоритмах рационализации и	
рациональности сумм сложных кубических радикалов .....	52
п. 5.1. Достаточные условия рациональности сумм СКубР на мно-	
жестве рациональных чисел .....	54
п. 5.2. 1-й алгоритм рационализации сумм СКубР на множестве	
рациональных чисел .....	57
п. 5.3. 2-й алгоритм рационализации сумм СКубР на множестве	
рациональных чисел .....	63
п. 5.4. Достаточные условия рационализации сумм сложных	

кубических радикалов на множестве вещественных чисел	69
п. 5.5. Универсальный алгоритм рационализации сумм сложных кубических радикалов на множестве вещественных чисел	73
§ 6. Проверка корней уравнения как метод рационализации сумм и произведений сложных кубических радикалов	79
п. 6.1. Об одном условии равносильности при решении иррациональных уравнений	79
п. 6.2. О рационализации сумм СКубР – корней иррациональных уравнений	83
п. 6.3. Одно обобщение теоремы 4	89
§ 7. О рационализации сложных кубических радикалов	91
п. 7.1. Достаточные условия рационализации сложных кубических радикалов на множестве рациональных чисел	91
п. 7.2. Новые представления золотого числа	94
п. 7.3. Другие примеры рационализации сложных кубических радикалов на множестве рациональных чисел	96
п. 7.4. Достаточные условия рационализации сложных кубических радикалов на множестве вещественных чисел	116
§ 8. О рационализации сложных кубических радикалов с параметрами	
п. 8.1. Постановка задачи	119
п. 8.2. О рационализации сложных кубических радикалов и их сумм с параметрами	123
Приложение	129
Литература	138
Оглавление	142